УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 151, кн. 2 Физико-математические науки *2009*

УДК 519.716

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕДООПРЕДЕЛЕННЫХ ЧАСТИЧНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

В.И. Пантелеев

Аннотация

Рассматриваются специальные представления функций, определенных на двоичных наборах и принимающих 4 значения. В частности, показано, что для таких функций есть представления, являющиеся аналогами известных представлений булевых функций: совершенная дизъюнктивная нормальная форма (сднф), совершенная конъюнктивная нормальная форма (скнф). В качестве следствий полученных представлений описаны некоторые полные и предполные множества.

Ключевые слова: частичные булевы функции, гиперфункции, полные множества, суперпозиция, специальные представления.

Введение

При построении математических моделей часто возникают ситуации неопределенности или запретности информации. Для обработки такого рода информации используются недоопределенные частичные отображения, то есть отображения из множества A в множество всех подмножеств множества B. При этом особое внимание уделяется конечным множествам. Образ элемента отражает степень его неопределенности (в частности, пустое множество определяет запретность данных, а одноэлементное – однозначность данных).

В данной работе рассматривается случай, когда $A = B = \{0,1\}$, то есть рассматриваются булевы функции (или функции алгебры логики) с двумя видами неопределенности, и для таких функций задается операция суперпозиции.

Пусть $E = \{0,1\}, F = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$. Тогда функции $f : E^n \to \{\{0\},\{1\}\}$ назовем всюду определенными или тотальными (P_2 – множество всех всюду определенных функций); $f : E^n \to F \setminus \{\varnothing\}$ – недоопределенными (P_2^- – множество всех недоопределенных функций); $f : E^n \to F \setminus \{\{0,1\}\}$ – частичными (P_2^* – множество всех частичных функций); $f : E^n \to F$ – недоопределенными частичными (нчбф)(P_2^{*-} – множество всех недоопределенных частичных булевых функций).

Если $f_1(\tilde{x}), \ldots, f_m(\tilde{x})$ – n-местные, $f(x_1, \ldots, x_m)$ – m-местная нчбф, то суперпозиция $f(f_1(\tilde{x}), \ldots, f_m(\tilde{x}))$ определяет функцию $g(\tilde{x})$ следующим образом: для любого набора значений переменных $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E^n$

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{cases} \varnothing, \text{ если существует } i \in \{1, \ldots, m\} \text{ такое, что } f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \varnothing; \\ \bigcup f(\beta_1, \ldots, \beta_m) \mid \beta_i \in f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ i \in \{1, \ldots, m\} \text{ иначе.} \end{cases}$$

Для натурального $n > 0$ и любого $1 \le i \le n$ частичная n-местная проекция e_i^n определяется как $e_i^n(x_1, \ldots, x_n) = \{x_i\}$.

Замыканием множества $A \subseteq P_2^{*-}$ называется наименьшее множество, содержащее A, все проекции и замкнутое относительно суперпозиции.

Определение полного и предполного множеств, терма над множеством частичных недоопределенных функций является обычным.

В работе мы рассматриваем представления недоопределенных частичных функций термами специального вида и при этом будем говорить, что терм $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ представляет функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, если для любого набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E^n$ значений переменных выполняется равенство $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Для удобства изложения будем в дальнейшем использовать следующую кодировку: $\varnothing = *$, $\{0\} = 0$, $\{1\} = 1$, $\{0,1\} = -$.

1. Результаты

Для произвольной функции $f \in P_2^{*-}$ зададим всюду определенные функции: f_Δ^0 – 0-доопределение, f_Δ^1 – 1-доопределение, f_Δ^x – (01)-доопределение, $f_\Delta^{\bar{x}}$ – (10)-доопределение, f_0 – 0-характеристическая и f_1 – 1-характеристическая, следующим образом:

$$f_\Delta^0(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0, -, *\}; \\ 1, & \text{если } f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{1\}. \end{cases}$$

$$f_\Delta^1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{1, -, *\}; \\ 0, & \text{если } f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0\}. \end{cases}$$

$$f_\Delta^x(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0, *\}; \\ 1, & \text{если } f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{1, -\}. \end{cases}$$

$$f_\Delta^{\bar{x}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0, -\}; \\ 1, & \text{если } f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{1, *\}. \end{cases}$$

$$f_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0, -\} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$f_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{1, -\} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определим бинарную функцию $x \triangleright y :\ 1 \triangleright 0 = 0, 0 \triangleright 1 = 1, 0 \triangleright 0 = *, 1 \triangleright 1 = -$.

Теорема 1 [1]. *Для любой $f \in P_2^{*-}$ справедливо $f = f_0 \triangleright f_1$.*

Справедливость этого утверждения легко проверить, если рассмотреть все возможные значения функции f на произвольном наборе значений переменных.

Следствие 1. *Множество $P_2 \cup \{\triangleright\}$ является полным в P_2^{*-}.*

Следствие 2. *Пусть $f \in P_2^{*-}$ и при этом существуют два набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ такие, что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = *$ и $f(\beta_1, \ldots, \beta_n) = -$. Тогда множество $P_2 \cup \{f\}$ является полным в P_2^{*-}.*

Доказательство. Суперпозицией функций $f, x, \bar{x}, 0, 1$ можно получить функцию $(*-)$. Если $g_0(x,y,z) = (00111011)$, $g_1(x,y,z) = (* - * - * - *-)$, $g_2(x,y,z) = (00001111)$, $g_3(x,y,z) = (00110011)$, то $g_0(g_1, g_2, g_3) = h_0(x,y,z) = (* - *0 * 1 * 1)$.

И теперь суперпозиция функции h_0 и функций (0100), (0010) и (0111) определяет функцию $\triangleright$. □

В следующих представлениях мы будем использовать функции $x \cap y \in P_2^*$ и $x \cup y \in P_2^-$, которые определяются естественным образом:

x	y	$\cap$	$\cup$
0	0	0	0
0	1	$*$	$-$
1	0	$*$	$-$
1	1	1	1

Теорема 2. *Для любой нчбф справедливо разложение*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (f_\Delta^0 \cap f_\Delta^{\bar{x}}) \cup (f_\Delta^1 \cap f_\Delta^x).$$

Доказательство. Рассмотрим значение функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ на некотором наборе $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Пусть это значение равно «$-$». Тогда

$$f_\Delta^1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1, \quad f_\Delta^0(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0,$$
$$f_\Delta^{\bar{x}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0 \text{ и } f_\Delta^x(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1,$$

$(0 \cap 0) \cup (1 \cap 1) = -$. Остальные случаи проверяются аналогично. □

Следствие 3. *Множество* $P_2 \cup \{\cap, \cup\}$ *является полным в* P_2^{*-}.

Следствие 4. *Множество* $P_2^* \cup \{\cup\}$ *является полным в* P_2^{*-}.

Следствие 5. *Множество* P_2^* *является предполным в* P_2^{*-}.

Доказательство. Если $f \notin P_2^*$, то существует набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ такой, что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = -$. Значит, мы можем получить функцию, тождественно равную «$-$». Применив операцию суперпозиции к функциям (00010111), (0101), (0011) и $(----)$, получим функцию $(0--1)$. □

Следующие утверждения показывают, что в некотором смысле множества P_2^* и P_2^- являются двойственными.

Теорема 3. *Для любой нчбф справедливо разложение*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (f_\Delta^0 \cup f_\Delta^x) \cap (f_\Delta^1 \cup f_\Delta^{\bar{x}}).$$

Следствие 6. *Множество* $P_2^- \cup \{\cap\}$ *является полным в* P_2^{*-}.

Обозначим через $*$ функцию, которая на всех наборах равна $*$.

Следствие 7. *Множество* $P_2^- \cup \{*\}$ *является предполным в* P_2^{*-}.

Доказательство. Если $f \notin P_2^- \cup \{*\}$, то легко получить функцию $(*0)$, затем $(0**0)$ и наконец функцию $(0**1)$. □

Непосредственно из следствий 5 и 7 получаем

Следствие 8. *Множество* $P_2 \cup \{*\}$ *является предполным в* P_2^* [2], *а множество* P_2 *является предполным в множестве* P_2^- [3].

Для булевых функций достаточны известными являются некоторые специальные представления, такие, например, как дизъюнктивная нормальная форма и конъюнктивная нормальная форма. Покажем, что похожие разложения имеют место и для частичных недоопределенных булевых функций.

Как обычно полагаем

$$x^{\alpha} = \begin{cases} x, & \text{если } \alpha = 1, \\ \bar{x}, & \text{если } \alpha = 0 \end{cases}$$

и для функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, $h_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, h_n(x_1, \ldots, x_m)$ через $f^{h_1, \ldots, h_n}_{x_1, \ldots, x_n}$ обозначим суперпозицию $f(h_1, \ldots, h_n)$.

Определим две функции $\delta_i(x_1, \ldots, x_n) = (0-) \circ e_i(x_1, \ldots, x_n)$ и $\lambda_i(x_1, \ldots, x_n) = (-1) \circ e_i(x_1, \ldots, x_n)$, где $\circ$ – знак суперпозиции и пусть

$$\beta(\alpha_i) = \begin{cases} \delta_i, & \text{если } \alpha_i = 0, \\ \lambda_i, & \text{если } \alpha_i = 1. \end{cases}$$

Заметим, что при $\alpha_i = 0$

$$\beta(\alpha_i) = \beta(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_i = 0, \\ -, & \text{если } x_i = 1, \end{cases}$$

а при $\alpha_i = 1$

$$\beta(\alpha_i) = \beta(1) = \begin{cases} -, & \text{если } x_i = 0, \\ 1, & \text{если } x_i = 1. \end{cases}$$

Теорема 4 (аналог скнф). *Для любой функции $f \in P_2^{*-}$ справедливо разложение*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mathop{\&}_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E^n} \left(x_1^{\overline{\alpha}_1} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\alpha}_n} \vee f^{\beta(\alpha_1), \ldots, \beta(\alpha_n)}_{x_1 \ , \ldots, \ x_n} \right)$$

Доказательство. Рассмотрим значение функции f на некотором наборе $(a_1, \ldots, a_n)$. В правой части равенства конъюнкция берется по всем наборам $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, из которых один совпадает с $(a_1, \ldots, a_n)$. Тогда соответствующий конъюнктивный член равен

$$0 \vee \ldots \vee 0 \vee f(a_1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n).$$

Если же $a_j \neq \alpha_j$ для некоторого j, то соответствующий конъюнктивный член равен

$$1 \vee f(c_1, \ldots, c_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } f(c_1, \ldots, c_n) \neq *, \\ *, & \text{если } f(c_1, \ldots, c_n) = *, \end{cases},$$

где

$$c_i = \begin{cases} a_i, & \text{если } a_i = \alpha_i \\ -, & \text{если } a_i \neq \alpha_i. \end{cases}$$

Если $f(a_1, \ldots, a_n) \neq *$, то и $f(c_1, \ldots, c_n) \neq *$.

И теперь при $f(a_1, \ldots, a_n) = *$ справедливость разложения очевидна, а при $f(a_1, \ldots, a_n) \neq *$ в правой части получаем $f(a_1, \ldots, a_n) \& 1 = f(a_1, \ldots, a_n)$ □

Аналогично доказывается и следующее предложение.

Теорема 5 (аналог сднф). *Для любой функции $f \in P_2^{*-}$ справедливо разложение*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E^n} \left(x_1^{\alpha_1} \& \ldots \& x_n^{\alpha_n} \& f^{\beta(\alpha_1), \ldots, \beta(\alpha_n)}_{x_1 \ , \ldots, \ x_n} \right).$$

Следствие 9. *Для любой функции $f \in P_2^{*-}$ справедливо разложение*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E_2^n} \left(x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} \cdot f^{\beta(\alpha_1), \ldots, \beta(\alpha_n)}_{x_1 \ , \ldots, \ x_n} \right).$$

2. Обсуждение

Результаты, полученные в теоремах 1–3 можно распространить на случай, когда A – это конечное множество: $A = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, а $B = 2^A$, и в качестве следствия получить утверждения, аналогичные тем, что приведены в [4].

Функции $f : A^n \to A \cup \{\varnothing\}$ называются частичными, $f : A^n \to 2^A \setminus \{\varnothing\}$ называются гиперфункциями, $f : A^n \to 2^A$ называются частичными гиперфункциями (см., например, [5]).

Пусть P_k – множество всех функций $f : A \to A$, P_k^* – множество всех частичных функций, P_k^- – множество всех гиперфункций, P_k^{*-} – множество всех частичных гиперфункций на множестве A.

Очевидны следующие вложения: $P_k \subset P_k^* \subset P_k^{*-}$ и $P_k \subset P_k^- \subset P_k^{*-}$.

По аналогии с нчбф можно ввести $0, 1, \ldots, k-1$-характеристические функции, k-местную функцию $\rhd_k$, принимающую все k значений, показать справедливость утверждения, аналогичного теореме 1 и как следствие получить аналог критерия полноты С.В. Яблонского для функций k-значной логики [6].

Предложение 1. *Множество частичных гиперфункций на множестве A будет полным, если оно порождает P_k и содержит функцию, принимающую все 2^A значений.*

Определяя $0, 1, \ldots, k-1$-доопределения функции f, аналогичные соответствующим для нчбф и, добавляя к (01) и (10)-доопределениям, C-доопределения и соответствующие C'-доопределения, где $C \subseteq A$ и $|C| \geq 2$, можно доказать утверждения, аналогичные теоремам 2,3, следствиям 3, 4, 6 и получить

Предложение 2. *Множества P_k^* и $P_k^- \cup \{*\}$ являются предполными в P_k^{*-}.*

Предложение 3. *Замкнутыми классами, содержащими замкнутый класс P_k, являются только P_k, P_k^*, P_k^-, $P_k^- \cup \{*\}$, $P_k \cup \{*\}$, P_k^{*-}.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 07-01-00240).

Summary

V.I. Panteleyev. Special Expansions of Underdetermined Partial Boolean Functions.

The paper views special expansion of functions determined on two-element set and taking four meanings. In particular, it is shown that there are expansions for such functions, which are analogous to known expansion of Boolean functions, i. e. disjunctive normal form and conjunctive normal form. As a sequence of received expansion, some complete and maximal sets are described.

Key words: partial Boolean functions, hyperoperation, complete sets, composition, special representations.

Литература

1. *Пантелеев В.И., Перязев Н.А.* Недоопределенные частичные булевы функции и булевы уравнения // Материалы VII междунар. конф. «Дискретные модели в теории управляющих систем». – М.: МАКС Пресс, 2006. – С. 262–265.

2. *Фрейвалд Р.В.* О полноте частичных функций алгебры логики // Докл. АН СССР. – 1966. – Т. 167, № 6. – С. 1249–1250.

3. *Тарасов В.В.* Критерий полноты для не всюду определенных функций алгебры логики // Проблемы кибернетики. – М.: Наука, 1975. – Вып. 30. – С. 319–325.

4. *Doroslovački R., Pantović J., Vojvodić G.* One interval in the lattice of partial hyperclones // Chechoslovak Math. J. – 2005. – No 55 (130). – C. 719–724.

5. *Rosenberg I.G* An algebraic approach to hyperalgebras // Proc. 26th ISML, Santiago de Compostelo, May 28–31, 1996. – 1996.– P. 203–207.

6. *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986. – 384 с.

Поступила в редакцию
25.02.09

Пантелеев Владимир Иннокентьевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории вероятностей и дискретной математики Иркутского государственного университета.

E-mail: *vp@math.isu.ru*